УДК 517.547+517.988

Л. С. Маергойз

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ПРОНИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОЛДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С чувством глубокой признательности вспоминаю Валентина Константиновича Иванова, открывшего для меня полвека назад окно в мир удивительно красивого раздела математики – теории целых функций. Данная работа посвящена одной из задач этой теории – восстановлению квазиполиномов по конечному числу их значений на равномерной сетке. Эта задача восходит к Прони [1], предложившему метод представления результатов эксперимента в виде суммы экспонент. Она является частным случаем популярной проблемы аналитического продолжения функций с ограниченного (или дискретного) множества (см., например, [2–4]). Обзоры различных модификаций алгоритма Прони имеются в [5, гл. 11; 6, гл. 2, комментарии].

В исследовательской практике нередко требуется идентифицировать динамическую характеристику $y = y(t)$ показателя системы при регистрируемом внешнем воздействии на нее. При этом поведение показателя допускает математическое моделирование с помощью неоднородного ОЛДУ конечного порядка вида

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = \lambda Q(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с *неизвестными* постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$, λ, где $\lambda \neq 0$. Здесь $Q(t)$ – регистрируемый в динамике параметр воздействия на систему, при этом число λ называют его *коэффициентом влияния* на систему. Примером такого воздействия может служить электромагнитное поле, колебания которого регистрируются. Пусть входная информация о показателе системы $y = y(t)$ состоит из конечного числа его измеряемых значений через равные промежутки времени

$$y(kd) = c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{2}$$

называемых *моментами*. Здесь $d > 0$ – временной шаг.

В данной статье исследуется способ нахождения решения $y = y(t)$, $t \in \mathbb{C}$, уравнения (1) при условии (2) в случае, когда Q – заданный *квазиполином*, т. е.

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\alpha_j t} \cdot P_j(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

а в условии (2) $(c_0, c_1, \ldots, c_N)$ – заданный вектор моментов. При этом показатели $\{\alpha_j\}_1^m$ экспонент и коэффициенты полиномов $\{P_j\}_1^m$, координаты вектора моментов, а также неизвестные коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$, λ уравнения (1) являются в общем случае комплексными числами. Число $r = r_1 + \cdots + r_m$, где $r_j \geq 1$ и $r_j - 1$ – степень P_j при $j = 1, \ldots, m$, называют *порядком* квазиполинома Q.

Изложение опирается на соответствующие результаты для $Q(t) \equiv 0$ и $Q(t) \equiv 1$, опубликованные в [6, гл. 2]. Инженерный вариант изучаемой задачи для наиболее часто встречающегося на практике случая $k = 2$, когда параметр воздействия $Q(t)$ – простейший квазиполином (экспонента или гармоника с заданными параметрами), рассматривался в [7].

1. Интерполяционные свойства решений уравнения (1)

Рассмотрим сначала прямую задачу для уравнения (1). Изучим свойства его решений в предположении о том, что параметры $a_1, \ldots, a_k$, λ заданы.

Теорема 1. *Пусть y – любое фиксированное решение уравнения* (1), *где $a_1, \ldots, a_k$, λ – известные числа, и $\lambda \neq 0$. Введем обозначения*

$$\mathfrak{Y} = \{y_s = y(sd), \quad s \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{4}$$

где $d > 0$ – фиксированное число, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, \ldots\}$. Полагаем в пояснениях к формуле (3)

$$B_r(z) = z^r + b_1 z^{r-1} + \cdots + b_{r-1} z + b_r := \bigcup_{j=1}^{m} (z - e^{\alpha_j d})^{r_j}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

$$f_j = y_{j+r} + b_1 y_{j+r-1} + \cdots + b_r y_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

Пусть β_j – корень кратности k_j, где $j = 1, \ldots, \ell$, $\sum_{j=1}^{\ell} k_j = k$, характеристического уравнения

$$E_k(z) := z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{7}$$

для однородного ОЛДУ, соответствующего случаю $\lambda = 0$ в (1). *Тогда существует единственный вектор $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{C}^k$, не зависящий от выбора решения y и обладающий свойствами:*

1) *последовательность $\{f_j : j \in \mathbb{Z}_+\}$* (см. (6)) *удовлетворяет соотношению*

$$f_{j+k} + q_1 f_{j+k-1} + \cdots + q_k f_j = 0, \quad j \in \mathbb{Z}_+; \tag{8}$$

2) *вектор* q *определяется корнями уравнения* (7) *с помощью тождества*

$$T_k(z) := z^k + q_1 z^{k-1} + \cdots + q_k \equiv \bigcup_{j=1}^{\ell} (z - e^{\beta_j d})^{k_j}, \tag{9}$$

причем $q_k \neq 0$.

Доказательство. 1. В обозначениях формул (3), (5) выражение

$$H_r(z) = z^r + h_1 z^{r-1} + \cdots + h_r := \prod_{j=1}^{m} (z - \alpha_j)^{r_j} = 0 \tag{10}$$

есть характеристическое уравнение для однородного ОЛДУ

$$L(x) := x^{(r)} + h_1 x^{(r-1)} + \cdots + h_r x = 0.$$

Учитывая, что квазиполином $Q(t)$ (см. (1)) является решением именно этого уравнения, и применяя к обеим частям уравнения (1) дифференциальный оператор L, убеждаемся в том, что решение $y = y(t)$ уравнения (1) одновременно является и решением некоторого однородного ОЛДУ порядка $n = k+r$:

$$y^{(n)} + s_1 y^{(n-1)} + \cdots + s_n y = 0. \tag{11}$$

По построению корни его характеристического многочлена $S_n(z)$ состоят из корней уравнений (10) и (8), поэтому постоянные коэффициенты $s_1, \ldots, s_n$ уравнения (11) определяются из тождества

$$S_n(z) := z^n + s_1 z^{r-1} + \cdots + s_n \equiv H_r(z) E_k(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = r + k, \tag{12}$$

в обозначениях формул (7), (10).

2. Известен следующий результат о связи между решениями дифференциальных и разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [6, с. 51]).

Теорема 2. *Пусть* $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *– любое решение однородного ОЛДУ порядка* n (см. (11)) *с заданными постоянными комплексными коэффициентами. Предположим, что характеристический многочлен* $S_n(z)$ *этого уравнения допускает следующее разложение:*

$$S_n(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - \lambda_j)^{\gamma_j}, \quad z \in \mathbb{C}; \qquad \sum_{j=1}^{k} \gamma_j = n.$$

Тогда последовательность (4) – *решение разностного уравнения*

$$y_{n+j} + p_1 y_{n+j-1} + \cdots + p_n y_j = 0, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

такого, что соответствующее ему характеристическое уравнение

$$P_n(z) := z^n + p_1 z^n + \cdots + p_n = 0 \tag{14}$$

имеет коэффициенты и корни, однозначно определяемые корнями многочлена $S_n(z)$, *а именно справедливо разложение*

$$P_n(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - e^{\lambda_j d})^{\gamma_j}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad p_n = (-1)^n exp\{-s_1\} \neq 0.$$

Применяя теорему 2 к рассматриваемому в теореме 1 решению уравнения (1) и учитывая структуру характеристического многочлена $S_n(z)$ уравнения (11) (см. (12), (7), (10)), заключаем, что $e^{\alpha_j d}$ – корень кратности r_j уравнения (14), где $j = 1, \ldots, m$, а $e^{\beta_j d}$ – корень кратности k_j этого уравнения, где $j = 1, \ldots, \ell$. В данном случае уравнение (14) ассоциируется с уравнением (11). Поэтому разложение на множители многочлена $P_n(z)$ принимает вид (см. (14), (5), (9))

$$P_n(z) = B_r(z) T_k(z), \quad T_k(z) := z^k + q_1 z^{k-1} + \cdots + q_k. \tag{15}$$

Перемножая многочлены B_r, T_k и приравнивая в (15) коэффициенты при одинаковых степенях z, находим уравнения связи между коэффициентами $q_1, \ldots, q_k$ многочлена T_k и коэффициентами многочлена P_n в обозначениях формулы (5):

$$p_j = \sum_{(\mu,\nu) \in A_j} b_\mu q_\nu, \ A_j = \left\{(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ \mu + \nu = j, \ \mu \leqslant r, \ \nu \leqslant k\right\},$$

где $j = 1, \ldots, n$, $b_0 = q_0 = 1$ (см. также [5, гл. 10]). Подставляя эти равенства в уравнение (13), после элементарных преобразований приходим к рекуррентному соотношению – разностному уравнению (8), причем элементы последовательности $\{f_j\}$ определяются равенствами (6). Кроме того, T_k – характеристический многочлен этого уравнения (см. (9)).

Итак, все утверждения теоремы 1 доказаны.

2. Следствия из теоремы 1

Согласно теореме 1 уравнение (1) однозначно определяет вектор $q \in \mathbb{C}^k$ коэффициентов разностного уравнения (8), соответствующий *всем* решениям уравнения (1). Для *фиксированного* решения уравнения (1) теорема 1 допускает уточнение.

Следствие 1. *Пусть решение y уравнения* (1) *является квазиполиномом порядка s; $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ – множество показателей всех экспонент квазиполинома Q порядка r* (см. (3))*; $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$ – множество всех корней уравнения* (7)*. Тогда ассоциированная с ним последовательность $\{f_j\}$* (см. (6)) *является решением однородного разностного уравнения вида* (8) *порядка $s - r$. Кроме того, в обозначениях теоремы* 1 *справедливо неравенство $r + \sum\limits_{j=1}^{h} k_j \leqslant s \leqslant n$, если $\mathfrak{B}' = \{\beta_1, \ldots, \beta_h\} = \mathfrak{A} \bigcap \mathfrak{B} \neq \varnothing$, или $r \leqslant s \leqslant n$, если $\mathfrak{B}' = \varnothing$.*

Доказательство. План доказательства такой же, как и в случае теоремы 1. Исходя из информации о показателях экспоненциальных слагаемых решения y и степени их полиномиальных множителей, строится дифференциальный оператор порядка s с постоянными комплексными коэффициентами, аннулирующий y. По теореме 2 последовательность моментов (4) y является решением однородного разностного уравнения порядка s (см. (13)). Соответствующий ему характеристический многочлен P_s порядка s допускает разложение (см. (15))

$$P_s(z) = B_r(z)T_{s-r}(z), \quad T_{s-r}(z) := z^{s-r} + q_1 z^{s-r-1} + \cdots + q_{s-r}.$$

Множитель T_{s-r} – характеристический многочлен однородного разностного уравнения порядка $s - r$, решением которого является ассоциированная с y последовательность $\{f_j\}$ (см. (6)). Реализация этого плана осложняется техническими деталями, описание которых приводится ниже.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, любое фиксированное решение уравнения (1) имеет вид $y = y_0 + \lambda G$, где y_0 – некоторое решение однородного ОЛДУ, соответствующего случаю $\lambda = 0$ в (1), а G – частное решение (1) при $\lambda = 1$. Кроме того, $y_0 = y_\alpha + y_\beta$, где y_α – квазиполином с показателями экспонент, принадлежащих только $\mathfrak{B}'$; y_β – квазиполином с показателями из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A}$. Тогда решение y допускает представление

$$y(t) = y_\beta(t) + [y_\alpha(t) + \lambda G(t)], \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

где квазиполином в квадратных скобках содержит показатели экспонент, принадлежащих только $\mathfrak{A}$, а его порядок определяет слагаемое G. Рассмотрим возникающие при этом допустимые случаи.

1. Пусть $\mathfrak{B}' = \varnothing$. Тогда $y_\alpha \equiv 0$, $y_0 = y_\beta$, $s = s_0 + r$, где s_0, r – порядки соответственно квазиполиномов y_0, Q (см. (3)).

2. Пусть $\mathfrak{B}' \neq \varnothing$. Из структуры частного решения G следует, что s_G – порядок квазиполинома G – вычисляется по формуле $s_G = r + \sum_{j=1}^{h} k_j$, где k_j – кратность корня $\beta_j \in \mathfrak{B}'$ уравнения (7) при $j = 1, \ldots, h$. Возникает три варианта при вычислении порядка s решения y:

a) $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$, и тогда $y_\beta \equiv 0$, а $s = s_G = n$, поскольку $h = \ell$ (см. теорему 1);

b) $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}' \neq \varnothing$, но $y_\beta \equiv 0$[1], и тогда $s = s_G < n$;

c) $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}' \neq \varnothing$, а y_β – квазиполином ненулевого порядка. В этом случае верна формула $s = s_\beta + s_G \leqslant n$, где s_β – порядок квазиполинома y_β.

Из этих рассуждений вытекает заключительное утверждение следствия 1 об ограничениях на величину s порядка решения y.

В общем случае последовательность моментов (4) квазиполинома y порядка s может быть решением разностного уравнения порядка, меньшего s, а последовательность $\{f_j\}$ – меньшего $s - r$, как показывает следующий

Пример. Квазиполином $y(t) = \sin \omega t + e^{\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$, порядка 3, где $\omega > 0$, является решением уравнения $y'' + \omega^2 y = (\alpha^2 + \omega^2) e^{\alpha t}$. Если $d = \pi/\omega$, то $y_j = y(jd) = e^{\alpha dj}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, является решением разностного уравнения $y_{j+1} - e^{\alpha d} y_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$ порядка 1, а $f_j \equiv 0$,$j \in \mathbb{Z}_+$.

Из теоремы 1 заключаем, что уравнение (1) однозначно определяет ассоциированное с ним разностное уравнение (8). Обратное утверждение верно при естественных ограничениях.

Следствие 2. *Пусть $z_1, \ldots, z_\ell$ – все корни характеристического уравнения* (см. (9))

$$T_k(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}; \quad T_k(z) := z^k + q_1 z^{k-1} + \cdots + q_k \tag{17}$$

соответственно кратностей $k_1, \ldots, k_\ell$, ассоциированного с разностным уравнением (8)*; $d > 0$,*

$$\Pi(d) = \{z \in \mathbb{C} : \ |\Im z| < \pi/d\}. \tag{18}$$

Предположим, что все корни уравнения (7) *расположены в полосе $\Pi(d)$, т. е.*

$$\beta_j = (\ln z_j)/d \in \Pi(d), \quad j = 1, \ldots, \ell^{2)}. \tag{19}$$

[1] В частности, это условие выполняется, когда $y_0(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$.

[2] Здесь рассматриваются главные значения логарифмов.

Тогда коэффициенты $a_1, \dots, a_k$ *уравнений* (1) *и* (7) *однозначно определяются вектором* q *коэффициентов уравнения* (8).

Замечание. Следствие 2 остается справедливым, если в его формулировке вместо полосы $\Pi(d)$ взять произвольно фиксированную открытую горизонтальную полосу шириной $2\pi/d$.

3. Условия существования и единственности обратной задачи

Для решения обратной задачи выделим класс квазиполиномов, каждый элемент которого однозначно определяется своей последовательностью моментов.

3.1. Аналог теоремы Карлсона для квазиполиномов

Широко известна теорема Карлсона о том, что голоморфная функция F, заданная в правой полуплоскости, при определенных условиях обладает свойством: $F \equiv 0$, если $F(k) = 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ (см., например, [6, с. 47]). Убедимся в том, что квазиполиномы наследуют свойство, близкое к свойству многочленов[1)].

Теорема 3. *Если квазиполином* F *порядка* m *обладает свойством* $F(j) = 0$, $j = 1, \dots, m$, *а для его индикатора*

$$h_F(\theta) = \lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln |F(re^{i\theta})|, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

верно неравенство

$$h_F(\pi/2) + h_F(-\pi/2) < 2\pi, \tag{20}$$

то $F \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $F_s = F(s)$, $s \in \mathbb{N}$. По теореме 2 эта последовательность является решением некоторого однородного разностного уравнения

$$F_{m+j} + p_1 F_{m+j-1} + \dots + p_m F_j = 0 \tag{21}$$

порядка m. Отсюда при $j = 1$ из условия теоремы находим $F_{m+1} = 0$. Далее из (21) методом математической индукции получаем $F(j) = 0 \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$. Итак, все условия теоремы Карлсона [6, с. 47] выполнены. Следовательно, $F \equiv 0$.

[1)] Многочлен порядка s – простейший квазиполином порядка $s+1$, у которого показатель экспоненциального множителя равен 0.

Следствие 3. *Неравенство* (20) *справедливо тогда и только тогда, когда показатели всех экспонент квазиполинома F расположены в некоторой открытой горизонтальной полосе шириной 2π.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ – все показатели экспонент, входящих в F. Вычисляя индикатор F, находим формулу

$$h_F(\theta) = \max\{\Re\gamma_1 e^{i\theta}, \ldots, \Re\gamma_\ell\, e^{i\theta}\}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$-h_F(\pi/2) \leqslant \Im\gamma_j \leqslant h_F(-\pi/2) \quad \forall\, j = 1, \ldots, \ell.$$

Для доказательства остается воспользоваться соотношением (20).

3.2. Условия единственности решения обратной задачи

Перейдем теперь к изучению обратной задачи для уравнения (1). Зафиксируем квазиполином Q порядка r (см. (3)). При достаточно малом $d > 0$ все показатели $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ входящих в Q экспонент расположены в некоторой открытой горизонтальной полосе шириной $2\pi/d$. Без ограничения общности можно считать, что такой полосой является множество $\Pi(d)$ (см. (18)). Пусть $H_k(d; Q)$ – класс решений различных неоднородных линейных ОЛДУ порядка k вида (1) таких, что $\{a_i\}_1^k \subset \mathbb{C}$, и соответствующее характеристическое уравнение имеет корни только в полосе $\Pi(d)$. Для этого класса справедлива теорема, дающая условие единственности решения обратной задачи.

Теорема 4 (теорема единственности)*. Пусть число $N \geqslant r + 2k - 1$ произвольно зафиксировано, где r – порядок квазиполинома Q* (см. (3))*, у которого все показатели экспонент расположены в полосе* $\Pi(d)$ (см. (18))*, k – порядок уравнения* (1) *с неизвестными комплексными коэффициентами $a_1, \ldots, a_k, \lambda$, где $\lambda \neq 0$; $c = (c_0,\ c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ – заданный вектор входных данных. В классе $H_k(d; Q)$ может существовать лишь одна функция y, являющаяся решением некоторого уравнения вида* (1) *и удовлетворяющая условию* (2).

Доказательство. 1. Обозначим символом $\mathfrak{N}(c)$ множество элементов класса $H_k(d; Q)$, удовлетворяющих условию (2) для заданного вектора c входных данных. Предположим, что $\mathfrak{N}(c) \neq \varnothing$, и пусть $y_j \in \mathfrak{N}(c)$, $j = 1, 2$. Тогда квазиполином $u = y_1 - y_2$ обладает свойством

$$u(jd) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{22}$$

Оценим его порядок s. В общем случае квазиполиномы y_j, $j = 1, 2$ порядка $s_j \leqslant n$, где $n = k + r$, являются решениями разных уравнений вида (1) и допускают соответственно представления $y_j = g_j + \lambda_j G_j$, $j = 1, 2$, где G_j – их частные решения при $\lambda_j = 1$, $j = 1, 2$, а g_j, $j = 1, 2$, – решения ассоциированных с этими уравнениями соответствующих однородных ОЛДУ. Пусть S_j – порядок квазиполинома G_j, $j = 1, 2$, Δ – порядок разности $G_1 - G_2$. Тогда $\Delta \leqslant \max\{S_1, S_2\}$, поскольку эти функции имеют одинаковые показатели $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ входящих в них экспонент (см. (3)). Обозначим символом k_j порядок максимального слагаемого y_j, не содержащего экспонент с показателями $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, где $k_j \leqslant n - S_j$, $j = 1, 2$ (см. (16)). В этих обозначениях, учитывая, что, согласно следствию 1, $n - S_j \geqslant r$, получаем следующую оценку сверху порядка s квазиполинома u:

$$s \leqslant k_1 + k_2 + \Delta \leqslant 2n - S_1 - S_2 + \max\{S_1, S_2\} \leqslant r + 2k. \tag{23}$$

Функция $F(z) = u[(z-1)d]$, $z \in \mathbb{C}$, – квазиполином, у которого показатели всех входящих в него экспонент принадлежат полосе $\{z \in \mathbb{C} : \ |\Im z| < \pi\}$, так как по построению показатели экспонент функций y_1, y_2 расположены в $\Pi(d)$ (см. (18)). Из (22) выводим, что F удовлетворяет условию $F(j) = 0$, $j = 1, \ldots, N+1$. Но по предположению $N + 1 \geqslant 2k + r$, а порядки квазиполиномов F и u совпадают. Теперь из (23) заключаем, что все условия теоремы 3 выполнены. Поэтому $F \equiv 0$, $u \equiv 0$, $y_1 \equiv y_2$.

Покажем, что любая функция класса $H_k(d; Q)$ однозначно определяется и конструктивно своей конечной последовательностью моментов. Для этого понадобится следующая известная формула для решения y из класса $H_k(d; Q)$:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j e_j(t) + \lambda G(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

где G – частное решение некоторого уравнения вида (1) при $\lambda = 1$, а $\{e_1, \ldots, e_k\}$ – стандартная фундаментальная система решений ассоциированного с (1) однородного ОЛДУ

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = 0^{1)}. \tag{25}$$

Теорема 5. *Пусть в предположениях теоремы* 4 $N \geqslant k + r - 1$ *и* y – *элемент из* $H_k(d; Q)$, *удовлетворяющий ее условиям. Тогда в обозначениях формулы* (24) *неизвестные коэффициенты* $(A_1, \ldots, A_k, \lambda) \in \mathbb{C}^{k+1}$, $\lambda \neq 0$, *однозначно определяются из системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{k} A_j e_j(sd) + \lambda G(sd) = c_s, \quad s = 0, 1, \ldots, N. \tag{26}$$

[1)] В обозначениях теоремы 1 и следствия 2 (см. (7), (18), (19)) это означает, что $\{e_1, \ldots, e_k\} = \{e^{\beta_j t} t^s,\ t \in \mathbb{R};\ s = 0, 1, \ldots, k_j - 1;\quad \beta_j \in \Pi(d),\ j = 1, \ldots, \ell\}$.

Доказательство. Поскольку по условию $c_s = y(sd),\ s = 0, 1, \dots, N,$ – моменты решения y, то система (26) совместна. Предположим, утверждение теоремы неверно. Тогда ранг $r(A)$ матрицы A из коэффициентов при неизвестных в системе (26) меньше, чем $k+1$. Следовательно, столбцы этой матрицы линейно зависимы, т. е. найдутся такие числа $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j e_j(sd) + \gamma_{k+1} G(sd) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, N.$$

Это означает, что квазиполином

$$u(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j e_j(t) + \gamma_{k+1} G(t), \quad t \in \mathbb{C}, \tag{27}$$

порядка $\leqslant k + r$ удовлетворяет условию (22). Учитывая, что $N + 1 \geqslant k + r$, и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 4, получаем $u \equiv 0$. Это противоречит тому, что по предположению в соотношении (27) хотя бы одно из чисел множества $\{\gamma_j\}_1^{k+1}$ отлично от 0. Итак, $r(A) = k+1$. Следовательно, теорема справедлива.

Указанная в теореме 5 оценка снизу числа уравнений в системе (26), необходимых для определения параметров $(A_1, \dots, A_k, \lambda)$, является точной, что иллюстрирует следующий

Пример. Пусть $h > 0$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$,

$$G(t) = e^{\alpha t} \prod_{j=0}^{r-1} (t - jh), \quad Q(t) = G'(t) - \alpha G(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Квазиполином $y(t) = Ae^{\alpha t} + \lambda G(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порядка $r + 1$ является решением уравнения $y' - \alpha y = \lambda Q$, причем Q – квазиполином порядка r. Если $d = h$, то $G(jd) = 0$, $j = 0, 1, \dots, r-1$. Учитывая, что $k = 1$, $N \geqslant r + 1$, постоянные A, λ находятся из равенств (см. (23)) $A = c_0$, $Ae^{\alpha rd} + \lambda G(rd) = c_r$. Этот пример допускает естественное обобщение на случай любого уравнения вида (1) при подходящем выборе квазиполинома Q.

Заметим, что для нахождения A, λ в данном примере достаточно в (26) взять два уравнения, если выбрать другую равномерную сетку (например, взять некоторый сдвиг рассмотренной сетки или выбрать $d < h$).

3.3. Условия существования решения обратной задачи

При решении рассматриваемой в данной статье обратной задачи интерес представляет вопрос о нахождении уравнения вида (1) *наименьшего* порядка, входная информация о векторе моментов решения которого задается соотношениями (2), (3). Поэтому выберем в качестве объекта исследования подмножество всех элементов $H_k(d;Q)$, не являющихся решениями уравнения вида (1) порядка $k-1$:

$$L_k(d;Q) := H_k(d;Q)\backslash H_{k-1}(d;Q),$$

т. е. подкласс $H_k(d;Q)$, состоящий из квазиполиномов порядка $n = k + r$.

Алгоритм *конструктивного* нахождения решения рассматриваемой обратной задачи дает

Теорема 6 (теорема существования). *Пусть число* $N \geqslant r+2k-1$ *произвольно зафиксировано, где* r *– порядок квазиполинома* Q (см. (3)), *у которого все показатели экспонент расположены в полосе* $\Pi(d)$ (см. (18)), k *– порядок уравнения* (1) *с неизвестными комплексными коэффициентами* $a_1, \dots, a_k, \lambda$, *где* $\lambda \neq 0$; $c = (c_0,\ c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ *– заданный вектор входных данных. Полагаем в обозначениях соотношений* (2), (5)

$$d_j = c_{j+r} + b_1 c_{j+r-1} + \cdots + b_r c_j, \quad j = 0, 1, \dots, N - r. \tag{28}$$

Пусть выполняются следующие условия.

1. *Существует единственный вектор* $q = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{C}^k$, *где* $q_k \neq 0$, *удовлетворяющий рекуррентному соотношению*

$$d_{j+k} + q_1 d_{j+k-1} + \cdots + q_k d_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N - r - k, \tag{29}$$

причем уравнение (17) *имеет корни только в* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. *Рассмотрим уравнение* (1), *коэффициенты* $a_1, \dots, a_k$ *которого однозначно определяются вектором* q *с помощью процедуры, описанной в следствии* 2 *из теоремы* 1. *В обозначениях теоремы* 5 *существует решение* $(A_1, \dots, A_k, \lambda) \in \mathbb{C}^{k+1}$, $\lambda \neq 0$, *системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{k} x_j e_j(sd) + x_{k+1} G(sd) = c_s, \quad s = 0, 1, \dots, N. \tag{30}$$

Тогда функция $y(t)$, *представляемая формулой* (24), *принадлежит классу* $L_k(d;Q)$ *и удовлетворяет соотношению* (2), *причем* y *– единственное решение рассматриваемой обратной задачи.*

Доказательство. По построению (см. следствие 2) корни характеристического уравнения (7) для уравнения (25), как и показатели экспонент квазиполинома Q, расположены в полосе $\Pi(d)$. Условие 2 теоремы означает, что квазиполином y удовлетворяет равенству (2). Поэтому для последовательности $\mathfrak{F} = \{f_j,\ j \in \mathbb{Z}_+\}$, определяемой последовательностью моментов (4) по формуле (6), верно соотношение (см. (28)) $f_j = d_j,\ j = 0, 1, \dots, N - r$. Поскольку, согласно предположению, $N \geqslant r + 2k - 1$, то из условия 2 теоремы выводим, что ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} f_{k-1} & f_{k-2} & \cdots & f_0 \\ f_k & f_{k-1} & \cdots & f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N-r} & f_{N-r-1} & \cdots & f_{N-r-k} \end{matrix} \right\| \tag{31}$$

равен k. Следовательно, столбцы этой матрицы линейно независимы. Отсюда и из теоремы 1 заключаем, что $\mathfrak{F}$ – решение разностного уравнения (8) порядка k, которое не может быть решением подобного уравнения порядка $k - 1$. Теперь из следствия 1 имеем y – квазиполином порядка n. Итак, $y \in L_k(d; Q)$. В теореме 4 показано, что другого решения рассматриваемой обратной задачи существовать не может.

4. Оператор Прони и его представление

В этом разделе используются обозначения раздела 3 без дополнительных разъяснений.

Оператор восстановления квазиполинома из класса $L_k(d; Q)$ по его моментам назовем *оператором Прони.* Конструктивную формулу этого оператора позволяет получить утверждение 2 теоремы 4.

Вектор $c \in \mathbb{C}^{N+1}$ входных данных определяет однозначно из системы (29) вектор $q = q(c)$, все корни характеристического уравнения (7) для уравнения (25) и, следовательно, стандартную фундаментальную систему $\{e_1, \dots, e_k\}$ решений этого однородного ОЛДУ, а также искомое решение (см. (24)) y обратной задачи для уравнения (1). Обозначим символом M удовлетворяющее условиям теоремы 6 подмножество в $\mathbb{C}^{N+1}$ такое, что для каждого элемента $c \in M$ в классе $L_k(d; Q)$ существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), и оно единственно. Именно множество M является областью определения оператора Прони.

Теорема 7 (явная формула оператора Прони). *Пусть выполнены условия теоремы* 6 *и* (30) *имеет единственное решение, например, первая квадрат-*

ная подсистема линейных уравнений при $s = 0, 1, \dots, k$. Полагаем в обозначениях теоремы 5

$$e_{js} = e_j(sd), \quad j = 1, \dots, k; \quad G_s = G(sd), \quad s = 0, 1, \dots, k;$$

$$B = \begin{pmatrix} e_{10} & \dots & e_{k0} & G_0 \\ e_{11} & \dots & e_{k1} & G_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_{1k} & \dots & e_{kk} & G_k \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \left| \begin{array}{c|cccc} 0 & e_1(t) & \dots & e_k(t) & G(t) \\ \hline c_0 & & & & \\ c_1 & & B & & \\ \vdots & & & & \\ c_k & & & & \end{array} \right|, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Оператор, восстанавливающий функции класса $L_k(d; Q)$ по их моментам (оператор Прони), $\mathcal{A} : M \to L_k(d; Q)$, $\mathcal{A}c = y$ имеет следующий вид:

$$y(t) = -A(t)/\det B, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Доказательство вытекает из предположения теоремы 7 о единственности решения упомянутой в ней квадратной системы линейных уравнений и из следующего элементарного результата линейной алгебры, позволяющего преобразовать представление (24) решения обратной задачи в формулу (32).

Лемма. *Пусть $\{g_j(t),\ t \in D,\ j = 0, 1, \dots, k\}$ – система комплекснозначных функций, область определения D которых содержит набор различных точек $\{\tau_s,\ s = 0, 1, \dots, k\}$. Кроме того, заданы значения $d_s = g(\tau_s)$, $s = 0, 1, \dots, k$, линейной комбинации упомянутых функций*

$$g(t) = \sum_{j=0}^{k} C_j g_j(t), \quad t \in D, \tag{33}$$

с неизвестными постоянными комплексными коэффициентами такие, что квадратная система линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} C_j g_j(\tau_s) = d_s, \quad s = 0, 1, \dots, k,$$

имеет единственное решение. Тогда справедливо представление (см. (33))

$$g(t) = -C(t)/\det\Delta, \quad t \in D,$$

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} g_0(\tau_0) & g_1(\tau_0) & \dots & g_k(\tau_0) \\ g_0(\tau_1) & g_1(\tau_1) & \dots & g_k(\tau_1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_0(\tau_k) & g_1(\tau_k) & \dots & g_1(\tau_k) \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \left| \begin{array}{c|cccc} 0 & g_0(t) & g_1(t) & \dots & g_k(t) \\ \hline d_0 & & & & \\ d_1 & & & & \\ \vdots & & \Delta & & \\ d_k & & & & \end{array} \right|, \qquad t \in D.$$

Условие 2 теоремы 6 означает наличие дополнительного ограничения на вектор c входных данных и ассоциированный с ним вектор $q = q(c)$ (см. (28), (29)), позволяющего решить обратную задачу и, в частности, найти (как увидим ниже) сравнительно простую формулу для коэффициента влияния λ.

Теорема 8. *Пусть отображение* $\Phi\colon \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1-k}$ *задано следующим образом:* $\Phi(x) = (\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_{N-k}(x))$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$, *где*

$$\Phi_j(x) = x_{j+k} + \sum_{i=1}^{k} q_i x_{j+k-i}, \quad j = 0, 1. \dots, N-k.$$

В обозначениях теоремы 7 *полагаем* $\mathfrak{G} = (G_0, G_1, \dots, G_N)$. *Для того чтобы выполнялось условие* 2 *теоремы* 6, *необходимо и достаточно, чтобы вектор* c *удовлетворял рекуррентному соотношению*

$$c_{j+k} + q_1 c_{j+k-1} + q_k c_j = \lambda \Phi_j(\mathfrak{G}), \quad j = 0, 1, \dots, N-k, \ \lambda \neq 0, \tag{34}$$

причем при некотором $j = j_0$ *число* $\Phi_j(\mathfrak{G}) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. В обозначениях теоремы 7 полагаем $\mathfrak{E}_\ell = (e_{l0}, e_{\ell 1}, \dots, e_{\ell(N-k)})$, где $\ell = 1, \dots, k$. Зафиксируем произвольно $s \in 0, 1, \dots, N-k$. Учитывая, что система (30) совместна, умножим обе части уравнения с номером $s+i$ на q_{k-i}, где $i = 0, 1, \dots, k-1$, и прибавим все эти уравнения к уравнению с номером $s+k$. По теореме 2 последовательности моментов

$$E_\ell = \{e_{\ell s} = e_\ell(sd), \ s \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \ell = 1, \dots, k, \tag{35}$$

элементов фундаментальной системы $e_1, \ldots, e_k$ решений уравнения (25) являются решениями разностного уравнения (8). Следовательно, $\Phi_j(\mathfrak{E}_\ell) = 0$ при $j = 0, 1, \ldots, N-k$ для любого $\ell = 1, \ldots, k$. Поэтому после упомянутой операции сложения приходим к формуле (34).

Предположим $\Phi_j(\mathfrak{G}) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, N-k$, т. е. квазиполином

$$L(t) = G[(t+k)d] + \sum_{i=1}^{k} q_i G[(t+k-i)d], \quad t \in \mathbb{C},$$

порядка $s \leqslant k + r$ (см. (3)) обладает свойством $L(j) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, N-k$. Но по условию теоремы 7 $N - k + 1 \geqslant k + r$. Итак, в эквивалентной форме выполняются гипотезы теоремы 3 и следствия 3 (показатели входящих в Q и в G экспонент расположены в $\Pi(d)$). Поэтому $L \equiv 0$ и последовательность $G_s = G(sd)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ – решение разностного уравнения (8). Но система $E_1, \ldots, E_k$ (см. (35), [6, гл. 3, § 2]) – базис всех таких решений. Отсюда, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 5 (см. (27)), находим: G – решение уравнения (25). Противоречие. Итак, существует номер $j = j_0 \in \{0, 1, \ldots, N-k\}$ такой, что $\Phi_j(\mathfrak{G}) \neq 0$.

Достаточность. Преобразуя расширенную матрицу системы линейных уравнений (30) тем же способом, который использовался выше при эквивалентных преобразованиях уравнений этой системы, и опираясь на соотношения (34), убеждаемся в том, что условия теоремы Кронекера и Капелли выполняются, т. е. система (30) является совместной.

5. Алгоритм аппроксимации дискретной функции решениями уравнения (1)

На практике входные данные могут быть заданы с некоторой ошибкой измерения. Рассмотрим модификацию алгоритма Прони для аппроксимации вещественной динамической характеристики $g(t)$ по ее значениям в конечном числе узлов равномерной сетки с помощью квазиполиномов класса $L_k(d; Q)$, где $k \in \mathbb{N}$, а Q – заданный квазиполином порядка r (см. [3], § 3).

Пусть $c = (c_0, c_1, \ldots, c_N)$, где $N \geqslant r + 2k - 1$ – вектор вещественных входных данных изучаемого показателя $g(t)$, измеренных через равные промежутки изменения фактора t, т. е. $g(jd) = c_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Здесь $d > 0$ – шаг равномерной сетки, выбранный в соответствии с рассуждениями § 3. Ассоциируем с вектором c последовательность

$$F = \{f_j :\ j = 0, 1, \ldots, N-r\}, \tag{36}$$

удовлетворяющую соотношению (28), в котором символ d_j следует заменить на f_j. Возьмем функционал

$$\Phi_F(p) = \sum_{j=0}^{N-r-k} (f_{j+k} + p_1 f_{j+k-1} + \cdots + p_k f_j)^2, \quad p \in \mathbb{R}^k, \tag{37}$$

характеризующий невязку разностного уравнения (8). Известен следующий результат (см. [6, гл. 2, § 3]).

Теорема 9. *Пусть M – подмножество пространства $\mathbb{R}^{N-r+1}$ такое, что для любого $F \in M$ ранг матрицы* (31) *равен k. Тогда:* 1) *функционал Φ_F* (см. (37)) *достигает минимума в единственной точке $q = q(F) \in \mathbb{R}^k$ в том и только в том случае, когда $F \in M$;* 2) *функция $q(F)$ непрерывна на M.*

Если в обозначениях § 3 $y \in L_k(d; Q)$, т. е. y – решение уравнения (1) и не является решением подобного уравнения порядка $k-1$, то последовательность $\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-r}\}$, ассоциированная по формуле (6) с вектором моментов $(y_0, y_1, \ldots, y_N)$, $N \geq r + 2k - 1$, принадлежит M (см. (36)). Если рассматриваемая динамическая характеристика $g(t)$ допускает аппроксимацию решениями уравнения (1), то можно ожидать, что $F \in M$. Пусть $\Gamma = \mathbb{R}^{N-r+1} \setminus M$, $U_\varepsilon = \big(\mathbb{R}^{N-r+1} \setminus O_\varepsilon(\Gamma)\big)$, где $O_\varepsilon(\Gamma)$ – ε-окрестность множества Γ. Предположим, что $F \in U_\varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ выбрано так, что возможные ошибки в измерении координат вектора входных данных c не выводят его из U_ε.

Опишем алгоритм аппроксимации характеристики $g(t)$, исходя из дискретной информации о ней, квазиполиномами из класса $L_k(d; Q)$.

1. Находим вектор $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$, минимизирующий функционал Φ_F (см. теорему 9).

2. Определяем корни $z_1, \ldots, z_k$ многочлена $T_k(z)$ (см. (9)). Предположим, например, что они различные, вещественные и положительные. Тогда они допускают представление $z_j = e^{\beta_j d}$, $j = 1, \ldots, k$, где $\{\beta_j\}_1^k \subset \mathbb{R}$.

3. Имея в виду следствие 2 из теоремы 1, считаем, что $\beta_1, \ldots, \beta_k$ – корни характеристического уравнения (7) для однородного ОЛДУ (25), ассоциированного с уравнением (1). Поэтому общее решение уравнения (1) допускает представление (ср. (24))

$$y(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j e^{\beta_j t} + \lambda G(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{38}$$

где $\{A_1, \ldots, A_k, \lambda\}$ – неизвестные вещественные коэффициенты, а G – частное решение уравнения (1) при $\lambda = 1$.

4. В этом классе функций методом наименьших квадратов выберем «теоретическую кривую», приближающую вектор входных данных c исследуемой характеристики $g(t)$. Другими словами, в обозначениях формулы (38) возьмем функционал

$$F(A_1, \ldots, A_k, \lambda) = \sum_{j=0}^{N} (y_j - c_j)^2, \quad y_j = y(jd), \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

где y – квазиполином вида (38), и найдем его минимум в $\mathbb{R}^{k+1}$. Если он достигается при некоторых фиксированных значениях $\widehat{A_1}, \ldots, \widehat{A_k}$, $\widehat{\lambda}$, причем $\widehat{\lambda} \neq 0$, то определяемая ими с помощью формулы (38) функция $\widehat{y}(t)$ – искомое приближение характеристики $g(t)$, $t \geqslant 0$. По теореме 9 оно является единственным, поскольку ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & \ldots & 1 & G(0) \\ z_1 & \ldots & z_k & G(d) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^N & \ldots & z_k^N & G(Nd) \end{Vmatrix}$$

равен $k+1$ (см. доказательство теоремы 5).

5. При других предположениях относительно корней многочлена $T_k(z)$ схема алгоритма приближения аналогична изложенной. При наличии его комплексно сопряженных корней корни характеристического уравнения (7) находятся по формуле (18). Это гарантирует[1)] существование обобщенного оператора Прони

$$\mathcal{A}^* \colon U_\varepsilon \to L_k(d; Q), \quad \mathcal{A}^*(c) = \widehat{y},$$

восстанавливающего квазиполином из класса $L_k(d; Q)$, аппроксимирующего заданную дискретную функцию, совпадающую с вектором значений в конечном числе узлов равномерной сетки некоторой вещественной функции $g(t)$.

В работе [7] приведены примеры, доказывающие чувствительность рассмотренной модификации алгоритма Прони к малым изменениям координат вектора входных данных.

Автор искренне признателен Ю. Е. Аниконову за постановку задачи.

Литература

1. Prony G. R. B. Essai experimental et analytique, etc. // J. de L'Ecole Polytechnique. 1795. Vol. 1, № 2. P. 24–76.

[1)] При отсутствии отрицательных корней (см. теорему 6) и выполнении описанных в пунктах 1–5 условий.

2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

3. Аниконов Ю. Е., Узаков М. М. Оценки устойчивости в многомерных задачах аналитического продолжения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1985. С. 3–7.

4. Bukhgeim A. L. Extension of solutions of elliptic equations from discrete sets // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. Vol. 1, № 1. P. 17–32.

5. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

6. Маергойз Л. С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991; English transl., Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics. 2-nd ed. (rev. and enl.). Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Academic Publishers, 2003.

7. Маергойз Л. С., Варава Б. Н. Об одной модификации метода Прони // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 2(30). С. 93–100.

Статья поступила 14.12.2007 г.
Окончательный вариант 21.04.2008 г.